

# Задание 8

## Контекстно-свободные языки и магазинные автоматы

**Ключевые слова** <sup>1</sup>: язык, контекстно-свободный язык, магазинный автомат, грамматика, метод математической индукции.

### 1 МП-автоматы

#### 1.1 Определения

Моделью вычислений, распознающей класс контекстно-свободных языков (CFL), является автомат с магазинной памятью.

Под магазинной памятью понимается стек. Вы должны быть знакомы со стеком из курса алгоритмов, но на всякий случай я скажу про него пару слов. Неформально, стек – это стопка, например такая как колода карт. Работать со стеком можно следующим образом: карты можно брать только последовательно с верхушки колоды – если вы хотите вытащить вторую карту, то сначала вы должны взять первую, класть карты можно только на верх колоды. Сколько карт в колоде вы не знаете, а знаете только пуста колода или нет.

Формально, под стеком понимается следующая структура данных:

- элементы стека располагаются в порядке добавления, первый элемент, добавленный в стек называется *дном*, последний элемент, добавленный в стек, называется *верхушкой*;
- операция  $push(a)$  добавляет элемент  $a$  в стек, причём  $a$  становится верхушкой стека;
- операция  $pop()$  возвращает элемент  $a$ , находящийся на верхушке стека;
- операция  $empty()$  проверяет пустоту стека и возвращает истинное значение, если стек пуст.

---

<sup>1</sup>минимальный необходимый объем понятий и навыков по этому разделу)

Магазинные автоматы встречаются куда более чаще, чем стековые, но называются они магазинными, потому что на заре этой науки кто-то застолбил название стековые автоматы и под ними стали пониматься такие автоматы со стеком, что автомат мог просматривать содержимое стека, не меняя его содержания, а менять его только согласно правилам работы со стеком, что сильно меняло класс языков, распознаваемых автоматом: например, язык  $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$  не распознаётся ни одним МП-автоматом, но распознаётся стековым автоматом.

Теперь дадим формальное определение автомату с магазинной памятью.

**Определение 1.** Магазинный автомат содержит семь компонент и выглядит следующим образом:  $P = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, Z_0, \delta, F)$ , где

- $\Sigma$  – входной алфавит;
- $\Gamma$  – алфавит стека, т. е. символы, которые можно добавлять в стек;
- $Q$  – множество состояний автомата;
- $q_0 \in Q$  – начальное состояние автомата;
- $Z_0 \in \Gamma$  – единственный символ, находящийся в стеке при начале работы автомата;
- $\delta : Q \times \{\Sigma \cup \varepsilon\} \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$  – функция переходов;
- $F$  – множество принимающих состояний.

В начале работы автомат находится в состоянии  $q_0$  и в магазине лежит только символ  $Z_0$ . За такт работы, автомат считывает букву из входного слова (или же не считывает и тогда выполняет  $\varepsilon$ -переход) и действует согласно одному из правил перехода. А именно, пусть автомат находится в состоянии  $q$ , на верхушке стека лежит символ  $z \in \Gamma$  и автомат считывает букву  $\sigma$ . Тогда автомат выбирает одну из пар  $(q', \gamma) \in \delta(q, \sigma, z)$ , переходит в состояние  $q'$ , снимает с верхушки символ  $z$  и добавляет в стек слово  $\gamma$ , причём, если  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ , то  $\gamma_n$  оказывается снизу, а  $\gamma_1$  сверху. Автомат завершает работу с ошибкой, если не может выполнить переход, а входное слово ещё не обработано.

Выделяют два типа магазинных автоматов, которые различаются по условию приёма входного слова. В первом случае, автомат  $P$  принимает слово  $w$ , если существует такая последовательность переходов, что в результате обработки слова, он оказался в принимающем состоянии, в этом случае автомат  $P$  является *допускающим по заключительному состоянию*. Во втором случае, автомат  $P$  принимает слово  $w$ , если существует такая последовательность переходов, что в результате<sup>2</sup> обработки слова, стек автомата оказался пуст, в этом случае автомат называется *допускающим по пустому магазину*.

**Замечание 1.** Если  $\delta(q, \sigma, z) = \{(q_1, \gamma_1), (q_2, \gamma_2)\}$ , то автомат выбирает одну из пар и при переходе в состояние  $q_1$  автомат помещает в стек  $\gamma_1$ , а при переходе в  $q_2$ , автомат помещает в стек  $\gamma_2$ . Автомат **не может** перейти в  $q_1$ , а в стек положить  $\gamma_2$ !

**Определение 2.** Конфигурацией МП-автомата называется элемент множества  $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ . При начале работы на входе  $w$  автомат  $P$  находится в конфигурации  $(q_0, w, Z_0)$ . За такт работы автомат изменяет конфигурацию, согласно правилам перехода. Если автомат находился в конфигурации  $(q, \sigma v, Z_n \dots Z_2 Z_1 Z_0)$  и  $\delta(q, \sigma, Z_n) = \{(q_1, \gamma_1), (q_2, \gamma_2)\}$ , то автомат либо переходит в конфигурацию  $(q_1, v, \gamma_1 Z_{n-1} \dots Z_1 Z_0)$ , либо в  $(q_2, v, \gamma_2 Z_{n-1} \dots Z_1 Z_0)$ . Верхушка стека в цепочке  $Z_n \dots Z_2 Z_1 Z_0 \in \Gamma^*$  находится слева, дно стека находится справа.

На множестве конфигураций автомата  $P$  введено отношение  $\vdash_P$ , такое что если из конфигурации  $c_1$  согласно функции перехода  $P$  есть переход в конфигурацию  $c_2$ , то  $c_1 \vdash_P c_2$ . Когда ясно о каком автомате идёт речь, мы будем опускать индекс отношения. Так,  $(q, \sigma v, Z_n \dots Z_2 Z_1 Z_0) \vdash (q_1, v, \gamma_1 Z_{n-1} \dots Z_1 Z_0)$

**Замечание 2.** При выполнении такта работы, автомат всегда снимает символ с верхушки стека. Например, если изначально автомат находился в конфигурации  $(q_0, av, Z_0)$  и перешёл в конфигурацию  $(q, v, aZ_0)$ , то правило, которое он применил выглядит как  $(q, aZ_0) \in \delta(q_0, a, Z_0)$ . Кстати, в отличие от грамматик, входной алфавит и алфавит стека могут пересекаться. То есть, условие  $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$  **не** налагается.

<sup>2</sup>под «в результате» понимается что после обработки слова  $w$  стек оказался пуст. Если стек оказался пуст в процессе обработки слова, т.е. когда слово ещё не было прочитано до конца, то это не означает, что слово было принято автоматом

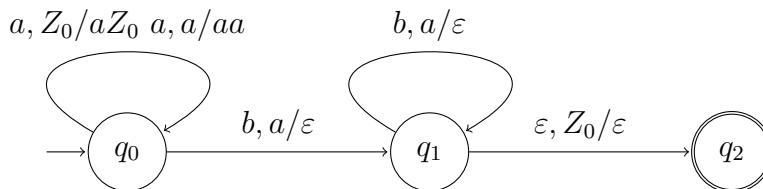
Напомним, что *рефлексивным и транзитивным замыканием* бинарного отношения  $R \subseteq A \times A$  называется минимальное рефлексивное и транзитивное бинарное отношение  $R^*$ , содержащее  $R$ . То есть, для любого  $a$  из  $A$  выполняется  $(a, a) \in R$ , и если  $(a, b) \in R$  и  $(b, c) \in R$ , то  $(a, c) \in R^*$ , даже если  $(a, c) \notin R$ . Кроме того, отношение  $R^*$  само по себе является транзитивным, то есть, если  $(a, b) \in R^*$  и  $(b, c) \in R^*$ , то и  $(a, c) \in R^*$ .

**Упражнение 1.** Загадка. Почему описанное отношение обозначают  $R^*$ ?

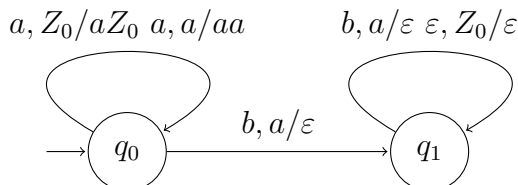
Определим условие приёма слова  $w$  автоматом  $P$  через транзитивное замыкание отношения  $\vdash$ . Если автомат  $P$  является допускающим по принимающему состоянию, то  $w \in L(P)$  тогда и только тогда, когда  $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma)$ , где  $q \in F$ ,  $\gamma \in \Gamma^*$ . Если автомат  $P$  является допускающим по пустому магазину, то  $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ , где  $q \in Q$  — не обязательно принимающее состояние.

## 1.2 Примеры

Графически магазинные автоматы задаются следующим образом: для каждого правила  $\delta(q, \sigma, Z) = (p, \gamma)$  на переходе из состояния  $q$  в состояние  $p$  пишут  $\sigma, Z/\gamma$ . Если автомат принимает слово по пустому магазину, то принято считать, что  $F = \emptyset$  (или вовсе не упоминать  $F$  при описании МА).



Данный автомат является допускающим по завершающему состоянию.



Данный автомат является допускающим по пустому стеку.

**Упражнение 2.** Показать, что данные автоматы распознают язык  $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ .

**Определение 3.** Магази́нный автомат  $P$  является *детерминированным*, если выполняются следующие два условия: 1) множество  $\delta(q, \sigma, Z)$  содержит не более одного правила  $\forall \sigma \in \Sigma, \forall Z \in \Gamma$ ; 2) если для символа  $\sigma$ ,  $\delta(q, \sigma, Z) \neq \emptyset$ , то  $\delta(q, \varepsilon, Z) = \emptyset$ . То есть, все переходы в автомате  $P$  определены однозначно и в случае когда из пары  $(q, Z)$  есть  $\varepsilon$ -переход, то других переходов из данной пары нет.

**Упражнение 3.** Показать, что автоматы, изображённые на диаграммах являются детерминированными.

Классическим примером КС-языков являются языки Дика. А именно, языком типа  $D_n$  будем называть язык состоящий из правильных скобочных выражений с  $n$  типами скобок. Формально, язык  $D_n$  определён над размеченным алфавитом  $\Sigma = \Sigma_n \cup \bar{\Sigma}_n$  – в  $\Sigma_n$  входят открывающиеся скобки, в  $\bar{\Sigma}_n$  закрывающиеся. Определим языки Дика индуктивно.

**Определение 4.** Язык Дика  $D_n$  задан грамматикой  $S \rightarrow \varepsilon \mid \sigma_i S \bar{\sigma}_i \mid SS$ , где  $i \in 1..n$ .

*Скобочным итогом*  $i$ -го типа слова  $w$ , назовём число  $\|w\|_i = |w|_{\sigma_i} - |w|_{\bar{\sigma}_i}$ . Если  $w$  является правильным скобочным выражением, то для любого префикса  $p : w = ps$  и любого  $i \leq n$  справедливо  $\|p\|_i \geq 0$  и  $\|w\|_i = 0$ . То есть,

$$w \in D_n \Rightarrow \forall i \leq n, \forall k \leq |w|, \|w[1, k]\|_i \geq 0, \|w\|_i = 0$$

**Упражнение 4.** Показать, что обратное неверно.

## 2 Задачи

**Внимание!** При решении задач на построение МП-автоматов нельзя использовать построение по алгоритму КС-грамматика  $\rightarrow$  МП-автомат.

В случае, когда в задаче указано, что требуется доказательство корректности по индукции, это является уточняющим требованием: во всех задачах на построение объектов требуется доказательство корректности. Языки во всех задачах определены над алфавитом  $\Sigma = \{a, b\}$ .

**Задача 1.** Постройте МП-автомат, распознающий язык непалиндромов  $\Sigma^* \setminus \text{PAL}$  над алфавитом  $\Sigma = \{a, b\}$ .

**Задача 2.** Построить КС-грамматику  $G$ , порождающую  $L$  или МП-автомат  $M$ , распознающий  $L$ .

1.  $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee i = k; i, j, k \geq 0\}$

2\*.  $L = \{w \mid w = uv \Rightarrow u \neq v\}$ , то есть  $w \in L$  непредставимо в виде  $ui$ .

**Задача 3.** Докажите, что если МП-автомат допускает язык по принимающему состоянию, то для него есть эквивалентный МП-автомат, допускающий одновременно и по принимающему состоянию и по пустому стеку. Формально,  $w \in L(M) \iff (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q_f, \varepsilon, \varepsilon)$ , где  $q_f \in F$ .

**Задача 4.** Докажите, что класс КС-языков замкнут относительно операции пересечения с регулярным языком.